2018 考研数学（一）真题及答案解析（文都版）

来源：文都教育

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1.下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　　）

A. $f(x)=|x|\sin|x|$　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$　C. $f(x)=\cos|x|$　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

答案：（D）

解析：方法一：

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\sin|x|=0$，可导

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}\sin\sqrt{|x|}=0$，可导

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x}=0$，可导

（D）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$不存在，不可导

应选(D).

方法二：

因为 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}, f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}\text{不存在}$$

$\therefore f(x)$在 $x=0$ 处不可导，选（D）

对(A): $f(x)=x\sin x$ 在 $x=0$ 处可导

对(B): $f(x)\sim|x|\bullet\sqrt{|x|}=|x|^{\frac{3}{2}}$ 在 $x=0$ 处可导

对(C): $f(x)=\cos x$ 在 $x=0$ 处可导.

（2）过点(1,0,0)与（0,1,0），且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为

A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

C. $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　D. $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$

答案:（B）

解析：将两点的坐标带入（C）、（D），显然不对；

又切平面的法向量$\vec{n}=\{2x,2y,-1\}$或$\vec{n}=\{-2x,-2y,1\}$，而（A）的平面$x+y-z=1$的法向量为$\vec{n}=\{1,1,-1\}$，排除（A），故应选（B）

（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$

A. $\sin1+\cos1$　B. $2\sin1+\cos1$　C. $3\sin1+\cos1$　D. $3\sin1+2\cos1$

答案：（B）

解析：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+1+2}{(2n+1)!}$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n)!}+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}$

而$\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$

所以，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=\cos1+2\sin1$.选(B).

（4）设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x,$ 则

A. $M>N>K$.　　B. $M>K>N$.

C. $K>M>N$.　　D. $K>N>M$.

答案：（C）

解析：$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\dfrac{2x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x$，

$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，因为$\mathrm{e}^x>x+1$，所以$\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x}<1$

$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$，$1+\sqrt{\cos x}>1$.即$\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}<1<1+\sqrt{\cos x}$

所以由定积分的比较性质$K>M>N$，应选（C）.

（5）下列矩阵中，与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为

A.$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　B.$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

C.$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　D.$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

答案：（A）

解析：令$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$则$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\because P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$\therefore$选项为 A

（6）设A，B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩，（$X\quad Y$） 表示分块矩阵，则

A.$r(A\quad AB)=r(A)$　　B.$r(A\quad BA)=r(A)$

C.$r(A\quad B)=\max\{r(A),r(B)\}$　　D.$r(A\quad B)=r(A^T\quad B^T)$

答案：（A）

解析：易知选项 C 错

对于选项 B 举反例：取$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$

则$BA=\begin{pmatrix}0&0\\3&3\end{pmatrix},(A,BA)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&3&3\end{pmatrix}$

$r(A,BA)\neq r(A)$

对于选项 D，举反例：

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\text{则 } r(A,B)=2\neq r(A^T,B^T)$$

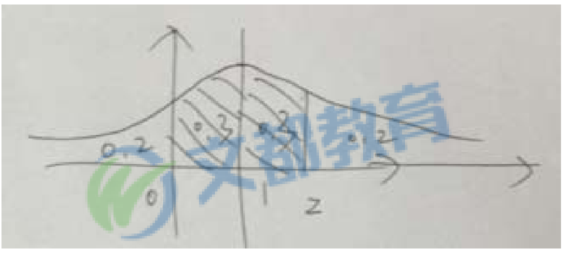
（7）设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $p\{X<0\}=$

A. 0.2　　B. 0.3　　C. 0.4　　D. 0.6

答案：（A）

解析：$f(1+x)=f(1-x)$，故 X 的概率密度关于直线 $x=1$ 对称

于是由 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$ 有：



于是 $P\{X<0\}=0.2$

（8）给定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，给定样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对总体均值 μ 进行检验，令 $H_0:\mu=\mu_0,H_1:\mu\neq\mu_0$，则

A．若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也拒绝 H_0.

B. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时拒绝 H_0.

C. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时接受 H_0.

D. 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也接受 H_0.

答案：选（D）

解析：在 $\alpha=0.05$ 下的接受域为 $(\overline{X}-u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$\because u_{0.025}<u_{0.005}$

$\therefore$ 在 $\alpha=0.01$ 下的接受域

$(\overline{X}-u_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{0.005}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})\supset(\overline{X}-u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$，故选（D）.

二、填空题：**9~14** 小题，每小题 **4** 分，共 **24** 分。

9.若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$,则$k=$________.

解析：

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)\frac{1}{\sin kx}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\cdot\frac{1}{\sin kx}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x}{kx}}=\mathrm{e}^{-\frac{2}{k}}=\mathrm{e}$$

所以，$-\dfrac{2}{k}=1,k=-2$

10.设函数 $f(x)$具有 2 阶连续导数，若曲线 $y=f(x)$过点$(0,0)$且与曲线 $y=2^x$ 在点$(1,2)$处相切，则 $\int_0^1 xf''(x)dx=$________.

解析：由题意 $f(0)=0,\ y'\big|_{x=1}=2^x\ln 2\big|_{x=1}=2\ln 2,\ f(1)=2$

$$\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=f'(1)-f(x)\Big|_0^1=f'(1)-f(1)+f(0)=2\ln 2-2$$

11.设 $F(x,y,z)=xy\vec{i}-yz\vec{j}+zx\vec{k}$，则$\mathbf{rot}\vec{F}(1,1,0)=$________.

解析：
$$rot\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & zx\end{vmatrix}_{(1,1,0)}=y\vec{i}-z\vec{j}-x\vec{k}\Big|_{(1,1,0)}=\vec{i}-\vec{k}$$

（12）曲线 L 是由 $x^2+y^2+z^2=1$与$x+y+z=0$ 相交而成，求 $\oint xyds=$ ________

解析：

$$L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1 & ①\\ x+y+z=0 & ②\end{cases}\qquad (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=0\quad ③$$

所以③−①得 $xy+yz+xz=-\dfrac{1}{2}$

故 $\oint_L xyds=\dfrac{1}{3}\oint_L(xy+yz+zx)ds=-\dfrac{1}{6}\oint_L 1ds=-\dfrac{1}{6}.2\pi=-\dfrac{\pi}{3}$

（13）二阶矩阵 A 有两个不同特征值，α_1,α_2是 A 的线性无关的特征向量，

$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$,则$|A|=$ ______

解析：设 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2, \lambda_1\neq\lambda_2.$

$\because A^2(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$

$\therefore(\lambda_1^2-1)\alpha_1+(\lambda_2^2-1)\alpha_2=0$

$\because \alpha_1,\alpha_2$ 线性无关

$\therefore \lambda_1^2=1, \lambda_2^2=1$

$\because A$ 有 2 个互不相同的特征值.

$\therefore \begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=1\end{cases}$

$\therefore |A|=-1$

（14）设随机事件 A 与 B 相互独立， A 与 C 相互独立， $BC=\varnothing$，若 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{2}$，

$P(AC\mid AB\cup C)=\dfrac{1}{4}$，则 $P(C)=$________.

解析：$\dfrac{1}{4}=P(AC\mid AB\cup C)=\dfrac{P[AC(AB\cup C)]}{P(AB\cup C)}=\dfrac{P(AC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$

$=\dfrac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)}=\dfrac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}$，解得 $P(C)=\dfrac{1}{4}$.

三、解答题：**15~23** 小题，共 **94** 分.解答应写出文字说明、证明过程或写出步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x.$

解析：$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

$$=\frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+e^x-1}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{x}}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{x}-1+1}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\right)d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right]+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$$

（16）（本题满分 10 分）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

解析：设圆的周长为 x，正方形的周长为 y，正三角形的周长为 z，则 $x+y+z=2$ 为限制条件.

目标函数为 $S=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{z^2}{3^2}=\dfrac{x^2}{4\pi}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{12\sqrt{3}}$

方法 1：拉格朗日乘数法

$$L=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{12\sqrt{3}}+\lambda(x+y+z-2)$$

由 $\begin{cases}L'_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0\\ L'_y=\dfrac{y}{8}+\lambda=0\\ L'_z=\dfrac{z}{6\sqrt{3}}+\lambda=0\\ L'_\lambda=x+y+z-2=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{A}\times 2\\ y=\dfrac{8}{A}\times 2\\ z=\dfrac{6\sqrt{3}}{A}\times 2\end{cases}$ 这里 $A=2\pi+8+6\sqrt{3}$

由实际问题的背景可知：$S_{\min}=\dfrac{4\pi}{A^2}+\dfrac{16}{A^2}+\dfrac{12\sqrt{3}}{A^2}=\dfrac{4\pi+16+12\sqrt{3}}{A^2}$

$$=\frac{4\pi+16+12\sqrt{3}}{(2\pi+8+6\sqrt{3})^2}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$$

方法 2：记 $x_1=\frac{x}{\sqrt{4\pi}}$，$y_1=\frac{y}{\sqrt{16}}$，$z_1=\frac{z}{\sqrt{12\sqrt{3}}}$

则条件变为 $\sqrt{4\pi}x_1+\sqrt{16}y_1+\sqrt{12\sqrt{3}}z_1=2$

目标函数变为：$S=x_1^2+y_1^2+z_1^2$

由 Cauchy 不等式得 $2^2=\left(\sqrt{4\pi}x_1+\sqrt{16}y_1+\sqrt{12\sqrt{3}}z_1\right)^2$

$=\left[\left(\sqrt{4\pi},\sqrt{16},\sqrt{12\sqrt{3}}\right)\cdot(x_1,y_1,z_1)\right]^2$

$\le\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\cdot\left(4\pi+16+12\sqrt{3}\right)$

所以 $x_1^2+y_1^2+z_1^2\ge\frac{4}{4\pi+16+12\sqrt{3}}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

$\therefore S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

方法 3：$z=2-x-y$

$S=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{y^2}{16}+\frac{(2-x-y)^2}{12\sqrt{3}}$ ＊

由 $\begin{cases}S'_x=\frac{2x}{4\pi}-\frac{2\cdot(2-x-y)}{12\sqrt{3}}=0\\ S'_y=\frac{2y}{16}-\frac{2\cdot(2-x-y)}{12\sqrt{3}}=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{2\pi}{\pi+4+3\sqrt{3}}\\ y=\frac{8}{\pi+4+3\sqrt{3}}\end{cases}$ 代入＊得

$S_{\min}=\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$

（17）（本题满分 10 分）

曲面 $\Sigma: x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$，取前侧，求 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

解析：作曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x=0\\ 3y^2+3z^2=1\end{cases}$，取后侧，

设Σ,Σ_1围成的空间区域为Ω， $D_x=\{(y,z)|3y^2+3z^2\le 1-x^2\}$，

则由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma} xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy-\iint_{\Sigma_1} xdydz+(y^3+2)dzdx+z^3dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dv-0$$

$$=\int_0^1 dx\iint_{D_x}(1+3y^2+3z^2)dydz$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}}(1+3r^2)rdr$$

$$=\frac{\pi}{6}\int_0^1(x^4-4x^2+3)dx$$

$$=\frac{14\pi}{45}.$$

（18）（本题满分 10 分）

已知微分方程$y'+y=f(x)$，其中$f(x)$的是$\mathbf{R}$上的连续函数.

（1）若$f(x)=x$时，求微分方程的通解.

（2）若$f(x)$是周期为T的函数，证明：方程存在唯一的以T为周期的解.

解析：$y'+y=f(x)$

（1） $y'+y=x(P(x)=1,Q(x)=x)$

通解：$y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

$$=e^{-x}\left[\int x\cdot e^x dx+C\right]=e^{-x}\left[\int xde^x+C\right]=e^{-x}\left[xe^x-e^x+C\right]$$

通解：$y=x-1+Ce^{-x}$（C为任意常数）

（2）$y'+y=f(x)$（$f(x)$为周期函数）

$$y=e^{-\int 1dx}\left[\int f(x)\cdot e^{\int 1dx}dx+C\right]=e^{-x}\left[\int e^x\cdot f(x)dx+C\right] \quad ①$$

设$f(x)=f(x+T)$

由①知 $y=e^{-x}\left[\int_0^x f(t)e^t dt+C\right]$, 下面取一个特殊的 C 使之成为周期函数

$$
\begin{aligned}
y(x+T)&=e^{-x-T}\left[\int_0^{x+T} f(t)e^t dt+C\right]\\
&=e^{-x}\cdot e^{-T}\left[\int_0^{T} f(t)e^t dt+\int_T^{x+T} f(t)e^t dt+C\right]\\
&=e^{-x}\cdot e^{-T}\left[\int_0^{x} f(u+T)e^{u+T} du+\int_0^{T} f(t)e^t dt+C\right]\\
&=e^{-x}\left[\int_0^{x} f(u)e^{u} du+\left(C+\int_0^{T} f(t)e^t dt\right)e^{-T}\right]
\end{aligned}
$$

故 $C=\left(C+\int_0^T f(t)e^t dt\right)e^{-T}$，由 $C=\dfrac{\int_0^T f(t)e^t dt}{e^T-1}$ 为确定常数，故方程存在唯一的以 T 为周期的解.

（19）（本题满分 10 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0, x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明：①先证 $x_n>0$, 易证

②再证 $\{x_n\}$ 单减，由 $e^{x_{n+1}}=\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}=\dfrac{e^{x_n}-e^0}{x_n-0}\ \underline{\underline{\text{拉格朗日中值定理}}}\ e^{\xi}$，$\xi\in(0,x_n)$

$\therefore x_{n+1}=\xi<x_n$

$\therefore \{x_n\}$ 单减有下界，由此得 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在

③设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=A$, 则 $Ae^A=e^A-1$

$\Rightarrow A=0$

（20）（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$, 其中 a 是参数.

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解析：（1）$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 而 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0\\ x_2+x_3=0\\ x_1+ax_3=0\end{cases}$,

由$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$得

当$a\neq 2$时，$r(A)=3$，只有零解$x_1=x_2=x_3=0$.

当$a=2$时，$r(A)=2$，方程有无穷多解，

通解为$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k$为任意常数.

（2）由（1）知，当$a\neq 2$时A可逆，

令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_1+ax_3\end{cases}$，即$Y=AX$，则规范形为$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2$，

当$a=2$时，$r(A)=2$，

令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3\\y_2=x_2+x_3\\y_3=x_3\end{cases}$，则$f=y_1^2+y_2^2+(y_1+y_2)^2=2(y_1+\frac{1}{2}y_2)^2+\frac{3}{2}y_2^2$，

令$\begin{cases}z_1=\sqrt{2}\left(y_1+\frac{1}{2}y_2\right)\\z_2=\sqrt{\frac{3}{2}}y_2\\z_3=y_3\end{cases}$，则得规范形为$f=z_1^2+z_2^2$.

（21）（本题满分 11 分）

已知a是常数，且矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

（1）求a；

（2）求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

解析：（1）∵A 经过初得列变换化为 B

$\therefore r(A)=r(B)$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&3&-3a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore r(A)=2 \quad \therefore r(B)=2$.

由 $B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{pmatrix}$

得 $a=2$.

（2）令 $P_1=(X_1, X_2, X_3)$，$B=(b_1, b_2, b_3)$

$AP_1=A(X_1, X_2, X_3)=(AX_1, AX_2, AX_3)=(b_1, b_2, b_3)$

$\therefore AX_i=b_i$，$i=1,2,3$

$$(A\vdots B)=\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\1&3&0&\vdots&0&1&1\\2&7&-2&\vdots&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&3&-6&\vdots&-3&-3&-3\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1&2&2&\vdots&1&2&2\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&0&0&\vdots&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&6&\vdots&3&4&4\\0&1&-2&\vdots&-1&-1&-1\\0&0&0&\vdots&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore AX_1=b_1$ 的通解为 $X_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_1+3\\2k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$，（$k_1$ 为任意常数）

$AX_2=b_2$ 的通解为 $X_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_2+4\\2k_2-1\\k_2\end{pmatrix}$，（$k_2$ 为任意常数）

$AX_3=b_3$ 的通解为 $X_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6k_3+4\\2k_3-1\\k_3\end{pmatrix}$，（$k_3$ 为任意常数）

$\therefore P_1=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$（其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数）

$\because |P_1| = \begin{vmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = k_3 - k_2$

当 $k_2 \neq k_3$ 时，P_1 可逆,取可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} -6k_1+3 & -6k_2+4 & -6k_3+4 \\ 2k_1-1 & 2k_2-1 & 2k_3-1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$（$k_1$ 为任意常数，$k_2 \neq k_3$），使得 $AP = B$.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为：$P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$. Y 服从参数为 λ 的泊松分布，令 $Z=XY$.

（1）求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$；

（2）求 Z 的概率分布.

解析：（1）$Cov(X,Z)=E(XZ)-EX\cdot EZ=E(X^2Y)-EX\cdot EX\cdot EY$，

$$=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY$$

其中，$EX=1\times\frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2}=0$，$EX^2=1^2\times\frac{1}{2}+(-1)^2\times\frac{1}{2}=1$，$EY=\lambda$，

故 $Cov(X,Z)=\lambda$.

（2）由题意知 $Z=XY$ 的取值范围是整数，

$P\{Z=k\}=P\{XY=k\}=P\{X=1,XY=k\}+P\{X=-1,XY=k\}$

$=P\{X=1,Y=k\}+P\{X=-1,Y=-k\}$

$=P\{X=1\}P\{Y=k\}+P\{X=-1\}P\{Y=-k\}$

$=\frac{1}{2}P\{Y=k\}+\frac{1}{2}P\{Y=-k\}$，

因为 Y 服从参数为 λ 的泊松分布，所以

当 $k=0$ 时，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}$，

当 $k>0$ 时，$P\{Z=k\}=\frac{\lambda^k}{2\cdot k!}e^{-\lambda}$，

当 $k<0$ 时，$P\{Z=k\}=\frac{\lambda^{-k}}{2\cdot(-k)!}e^{-\lambda}$，

故 Z 的分布律为 $P\{Z=k\}=\begin{cases} e^{-\lambda}, k=0 \\ \dfrac{\lambda^{k}}{2\cdot k!}e^{-\lambda}, k>0 \\ \dfrac{\lambda^{-k}}{2\cdot(-k)!}e^{-\lambda}, k<0 \end{cases}$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x;\sigma)=\dfrac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}$，其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$；

（1）求 $\hat{\sigma}$；

（2）求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$.

解析：（1）似然函数：$L(\sigma)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}=2^{-n}\sigma^{-n}\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|}$，

取对数，$\ln L(\sigma)=-n\ln 2-n\ln\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，

求导数有，$\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，

令 $\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=0$ 可得：$\sigma=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$，故 σ 的最大似然估计量为：$\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

（2）$E\hat{\sigma}=E\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|\right)=E|X|=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\dfrac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}dx=$

$$\underline{\underline{x=\sigma t}}\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t}\sigma dt=\sigma\Gamma(2)=\sigma.$$

$D\hat{\sigma}=D\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|\right)=\dfrac{1}{n}D|X|=\dfrac{1}{n}\left[E\left(|X|^2\right)-\left(E|X|\right)^2\right]$，而

$$E\left(|X|^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^2\frac{1}{2\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\sigma}}dx\,\underline{\underline{x=\sigma t}}\int_0^{+\infty}\frac{\sigma^2t^2}{\sigma}\mathrm{e}^{-t}\sigma dt$$

$$=\sigma^2\int_0^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-t}dt=\sigma^2\Gamma(3)=2\sigma^2,$$

于是，$D\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\left[E\left(|X|^2\right)-\left(E|X|\right)^2\right]=\dfrac{2\sigma^2-\sigma^2}{n}=\dfrac{\sigma^2}{n}$.