

2018 考研数学（三）真题（完整版）

来源：文都教育

一、选择题

1. 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（ ）

A. $f(x) = |x| \sin|x|$.

B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$.

C. $f(x) = \cos|x|$.

D. $f(x) = \cos|x| \sqrt{|x|}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，

且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ，则（ ）

A. 当 $f'(x) < 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

B. 当 $f''(x) < 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

C. 当 $f'(x) > 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

D. 当 $f''(x) > 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

3. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$, $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$, 则

A. $M > N > K$

B. $M > K > N$

C. $K > M > N$

D. $K > N > M$

4. 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导，其中， Q 为产量，若产量为 Q_0 时平均成本最小，则

A. $C'(Q_0) = 0$

B. $C'(Q_0) = C(Q_0)$

C. $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$

D. $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$

5. 下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的是 ()

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. 设 A, B 为 n 阶矩阵，记 $r(x)$ 为矩阵 X 的秩， (X, Y) 分别表示分块矩阵，则 ()

A. $r(A \quad AB) = r(A)$

B. $r(A \quad BA) = r(A)$

C. $r(AB) = \max\{r(A), r(B)\}$

D. $r(AB)^2 = r(A^T B^T)$

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$ 且 $\int_0^2 f(x)dx = 0.6$,

则 $P\{X < 0\} =$ _____.

A. 0.2

B. 0.3

C. 0.4

D. 0.5

8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本，令

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}, \text{则 ()}$$

A. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n)$

B. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$

C. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n)$

D. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1)$

二、填写题

9. 曲线 $y = x^2 + 2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____.

10. $\int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} dx$ _____.

11. 差分方程: $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的通解是_____.

12. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)$ ($\Delta x \rightarrow 0$) 且 $f(0) = 2$ 则 $f(1) =$ _____.

13. 设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的向量组, 若

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1\alpha_3, \text{则}|A| = \text{_____}.$$

14. 随机事件 A, B, C 相互独立, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. 则 $P(AC | A \cup B) =$ _____.

三、解答题

15. 已知实数 a, b 满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(ax + b)e^{\frac{1}{x}} - x \right] = 2$. 求 a, b

16. 设平面区域 D 由曲线 $y = \sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y = \sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D x^2 dx dy$

17. 将长为 $2m$ 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形, 三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值:

18. 已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($-1 < x < 1$). 求 a_n .

19. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n \cdot e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

20. 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + ax_3)^2$ 其中 a 是参数.

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形.

21. 已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a .

(2) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

22. 已知随机变量 X, Y 相互独立且 $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$

Y 服从参数为 λ 的泊松分布 $Z = XY$

(1) 求 $\text{Cov}(X, Z)$

(2) 求 Z 的分布律

23. 已知总体 X 的密度函数为 $f(x, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本

σ 为大于 0 的参数, σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$

(1) 求 $\hat{\sigma}$

(2) 求 $E\hat{\sigma}, D\hat{\sigma}$