一、整数

1.常见整除的数的特征

能被 2 整除的数：个位为 0，2，4，6，8.

能被 3 整除的数：各数位数字之和能被 3 整除.

能被 4 整除的数：末两位（个位和十位）数字能被 4 整除.

能被 5 整除的数：个位为 0 或 5.

能被 6 整除的数：既能被 2 整除又能被 3 整除.

能被 7 整除的数：末三位数与末三位数之前的数字所表示的数之差能被 7 整除.

能被 8 整除的数：末三位（个位、十位和百位）数字能被 8 整除.

能被 9 整除的数：各数位数字之和能被 9 整除.

能被 10 整除的数：个位必为 0.

能被 11 整除的数：奇偶位差法，奇数位数字和与偶数位数字和之差能被 11 整除.

2.奇数与偶数的运算

运算法则：两个偶数或两个奇数的和、差必为偶数，一个偶数和一个奇数的和、差必为奇数，偶数和任意整数的乘积为偶数，两个奇数的乘积为奇数.

运算性质：奇数不能被偶数整除，一个奇数如能被另一个奇数整除，商必为奇数，一个偶数如能被一个奇数整除，商必为偶数，一个偶数如能被另一个偶数整除，则其商的奇偶性不能确定，偶数的正整数次乘幂仍为偶数，奇数的正整数次乘幂仍为奇数.

3.质数与合数

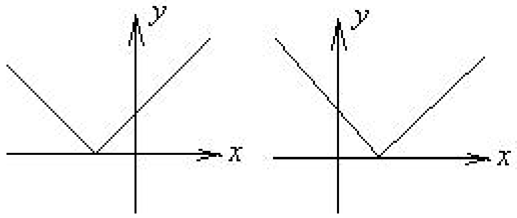
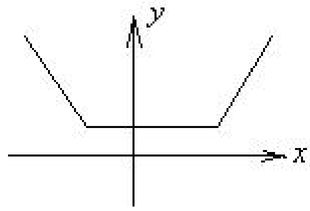
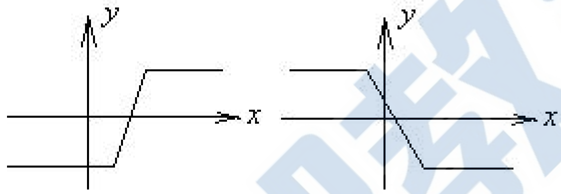
较小的质数依次为：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、…；质数中仅有一个最小质数 2 为偶数，大于 2 的质数必为奇数；任何合数可以唯一分解为若干个质数的乘积

二、绝对值

1．绝对值自比

命题形式一	命题形式二	命题形式三
$\frac{a}{\lvert a\rvert}=\begin{cases}1 & \Leftrightarrow \text{正}\\ -1 & \Leftrightarrow \text{负}\end{cases}$	$\frac{a}{\lvert a\rvert}+\frac{b}{\lvert b\rvert}=\begin{cases}2 & \Leftrightarrow \text{两正}\\ 0 & \Leftrightarrow \text{一正一负}\\ -2 & \Leftrightarrow \text{两负}\end{cases}$	$\frac{a}{\lvert a\rvert}+\frac{b}{\lvert b\rvert}+\frac{c}{\lvert c\rvert}=\begin{cases}3 & \Leftrightarrow \text{三正}\\ 1 & \Leftrightarrow \text{两正一负}\\ -1 & \Leftrightarrow \text{一正两负}\\ -3 & \Leftrightarrow \text{三负}\end{cases}$

2．绝对值函数

函数	图像	最值特征
绝对值函数 $y=\|x-a\|$		零点起转折，最小值在零点处取得
绝对值函数 $y=\|x-a\|+\|x-b\|$		零点起转折，形状似凹槽，最小值在凹槽底部一段区间取得：$y_{\min}=\|a-b\|$ 无最大值
绝对值函数 $y=\|x-a\|-\|x-b\|$		零点起转折，形状似 Z 字，$y_{\max}=\|a-b\|$，$y_{\min}=-\|a-b\|$

3.三角不等式

$||a|-|b||\le|a+b|\le|a|+|b|$，左边等号成立条件为 $ab\le0$，右边等号成立条件为 $ab\ge0$.

$||a|-|b||\le|a-b|\le|a|+|b|$，左边等号成立条件为 $ab\le0$，右边等号成立条件为 $ab\le0$.

※等号成立条件的判断是考试解题关键.

三、代数式

1.因式定理与余式定理

（1）$(x-a)\,|\,f(x)\Leftrightarrow f(x)$ 含有因式 $(x-a)\Leftrightarrow f(a)=0\Leftrightarrow a$ 是方程 $f(x)=0$ 的根.

（2）多项式 $f(x)$ 除以 $(ax-b)$ 的余式为 $f(\frac{b}{a})$.

2.常用乘法公式

（1）平方差公式：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

（2）完全平方公式：$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$

（3）完全立方公式：$(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$

（4）立方和（差）公式：$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

（5）三元完全平方公式：$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

（6）$(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(c\pm a)^2=2(a^2+b^2+c^2\pm ab\pm bc\pm ca)$

四、方程与不等式

1. 判别式：

$\Delta=b^2-4ac$ 称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的判别式.

（1）$\Delta<0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 无实根；

（2）$\Delta=0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实根；

（3）$\Delta>0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实根；

2. 韦达定理： 设方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根为 x_1,x_2，则有 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\times x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$

（1）$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=-\dfrac{b}{c}$；

（2）$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$；

（3）$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$；

（4）$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$；

（5）$x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$；

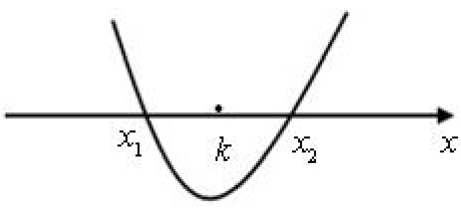
（6）$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

3. 一元二次方程根的分布（设 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$）

（1）零点定理： $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0\Leftrightarrow$ 存在 $x_0\in(\alpha,\beta)$ 使得 $f(x_0)=0$。

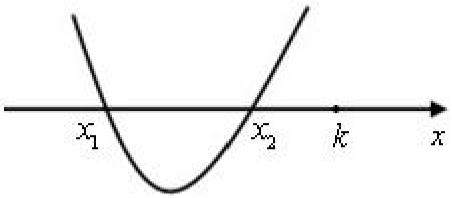
（2）常见一元二次方程根的分布情况

1）两根在 k 的两侧，$x_1<k<x_2\Leftrightarrow f(k)<0$：

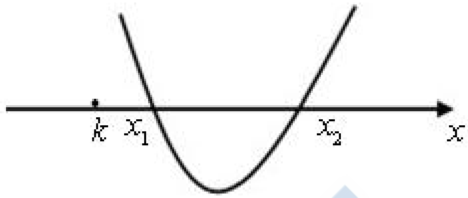


2）两根在 k 的同侧，分左、右两种情况：

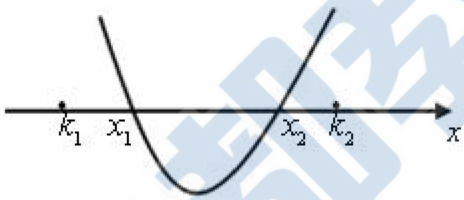
$$x_1 \le x_2 < k \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < k \\ f(k) > 0 \end{cases} \text{(左侧)或}\ k < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > k \\ f(k) > 0 \end{cases} \text{(右侧)(如下图所示)；}$$



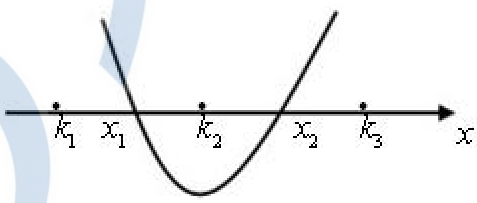
或



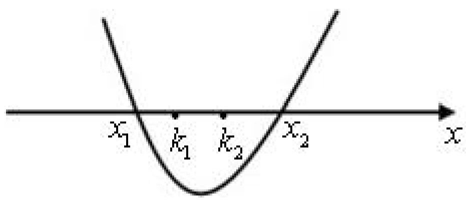
3）两根在区间 $(k_1，k_2)$ 内，$k_1 < x_1 < x_2 < k_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ k_1 < -\dfrac{b}{2a} < k_2 \\ f(k_1) > 0 \\ f(k_2) > 0 \end{cases}$ (如下图所示)；



4）两根在相邻的两区间 $(k_1，k_2)$ 和 $(k_2，k_3)$ 内，$k_1 < x_1 < k_2 < x_2 < k_3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(k_1) > 0 \\ f(k_2) < 0 \\ f(k_3) > 0 \end{cases}$；



5)两根在区间 $(k_1，k_2)$ 外，$x_1 < k_1$，$x_2 > k_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(k_1) < 0 \\ f(k_2) < 0 \end{cases}$ (如下图所示) .



4．分式方程和不等式

（1）常规解法：分式不能随意乘，移项通分化因式.确保最高系数正，穿线找解验分母.

（2）分式方程增根：增根使分母为零

5．绝对值不等式求解

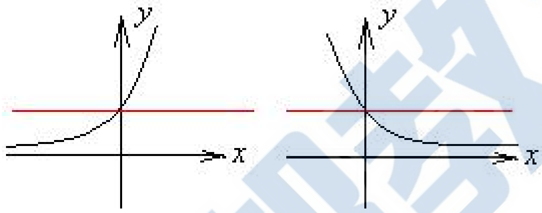
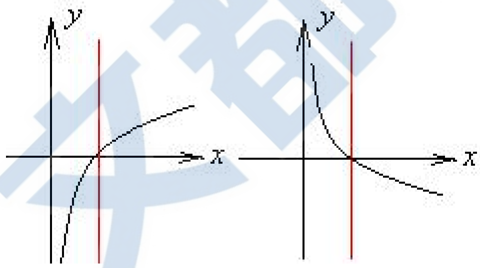
解法要点：解绝对值不等式的关键是去掉绝对值符号

$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g(x)$ 或 $f(x)<-g(x)$

$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$

$|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$ 或 $|f(x)|<|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x)$

6．对数函数与指数函数

函数	图像	特征
指数函数 $y=a^x$		1. 定点 $(0,1)$ 2. $a>1 \Leftrightarrow$ 增 $0<a<1 \Leftrightarrow$ 减
对数函数 $y=\log_a x$		1. 定点 $(1,0)$ 2. $a>1 \Leftrightarrow$ 增 $0<a<1 \Leftrightarrow$ 减

指数与对数的运算法则与性质

（1）$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

（2）$a^x \div a^y = a^{x-y}$

（3）$(a^x)^y = a^{xy}$

（4）$a^x \cdot b^x = (ab)^x$

对数函数的运算法则及性质：

（1）$\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$

（2）$\log_a a^x = x$，$a^{\log_a x} = x$

（3）$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$；$\log_a(\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y$

（4）$\log_a(x^y)=y\log_a x$；$\log_a(m^\alpha\cdot n^\beta)=\alpha\log_a m+\beta\log_a n$

（5）换底公式：$\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$；$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$；$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$；

$\log_{a^k} b^n=\frac{n}{k}\log_a b$

五、等差数列、等比数列的公式及性质应用

★★★等差三公式	★★★等比三公式
公式一：通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d$	公式一：通项公式：$a_n=a_1q^{n-1}$
公式二：求和公式： $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$	公式二：求和公式： $S_n=\begin{cases}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & 当q\neq1时适用\\ na_1, & 当q=1时适用\end{cases}$
公式三：中项公式：$a_n=\frac{a_{n-m}+a_{n+m}}{2}$	公式三：中项公式：$a_n=\sqrt{a_{n-m}\bullet a_{n+m}}$
★★★等差四性质	★★★等比三性质
性质一：位项等和： 若$m+n=p+q$,则$a_m+a_n=a_p+a_q$	性质一：位项等积： 若$m+n=p+q$,则$a_ma_n=a_pa_q$
性质二：位项定差：$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$	性质二：位项定比：$\lg q=\frac{\lg a_m-\lg a_n}{m-n}$
性质三：等距保性：	性质三：等距保性：

等距项还是等差数列： $a_{m+k}, a_{n+2k}, a_{n+3k}, \cdots$ 等距和还是等差数列： $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \cdots$	等距项还是等比数列： $a_{m+k}, a_{n+2k}, a_{n+3k}, \cdots$ 等距和还是等比数列： $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, \cdots$
性质四： $\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}$	

※当 $\lvert q\rvert<1$ 时，无穷等比数列 $\{a_n\}$ 各项的和 $S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\dfrac{a_1}{1-q}$.

六、平面图形

1..三角形面积公式

如 AD 为 ΔABC 中 BC 边上的高，则 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot BC$

$S=\dfrac{1}{2}ah=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=rp=\dfrac{abc}{4R}$，其中 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，

r 是三角形的内切圆半径，R 是三角形的外接圆半径

2.四边形的性质

（1）任意四边形四个内角和为 $360°$

（2）任意四边形各边中点依次连接所得四边形为平行四边形，其面积为原四边形面积的 $\dfrac{1}{2}$

平面图形
- 1.三角形
  - (1) 面积
  - (2) 相似与全等
  - (3) 勾股定理
- 2.四边形
  - (1) 平行四边形
  - （2）梯形
  - (3) 菱形
  - （4）矩形
- 3.圆形与扇形（重点）
- 4.求阴影部分面积（重点）

七、空间几何体

1.长方体体积 $V=abc$，表面积 $F=2(ab+bc+ca)$，体对角线 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。

正方体体积 $V=a^3$，表面积 $F=6a^2$，体对角线 $d=\sqrt{3}a$。

2. 圆柱体积为$V=\pi r^2 h$，侧面积$S=2\pi rh$，全面积$F=2\pi r(r+h)$。

3.球体体积为$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，其表面积为$S=4\pi r^2$。

几何体
- 1.正方体和长方体
  - (1) 表面积
  - (2) 体积
  - (3) 面对角线与体对角线
- 2.圆柱体
  - (1) 表面积
  - (2) 体积
- 3.球体
  - (1) 表面积
  - (2) 体积
- 4.组合体

八、解析几何

1.重要公式

（1）两点间的距离公式：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

（2）中点坐标公式：$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2}$

（3）两点连线斜率公式：$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},(x_1\neq x_2)$

2.直线方程的五种形式

（1）**点斜式：** $y-y_0=k(x-x_0)$

（2）**斜截式：** $y=kx+b$

（3）**两点式：** $\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$

（4）**截距式：** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

（5）**一般式：** $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$

3.点线位置关系：

（1）点到直线距离公式：$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$【直线方程：$Ax+By+C=0$点$P(x_0,y_0)$】

（2）点关于直线对称：

已知直线方程为$l: Ax+By+C=0$求点$P(x_0,y_0)$关于直线l的对称点$M(a,b)$.

解题要点：$\begin{cases} A\dfrac{x_0+a}{2}+B\dfrac{y_0+b}{2}+C=0 \\ -\dfrac{A}{B}\cdot\dfrac{y_0-b}{x_0-a}=-1 \end{cases}$（斜率不存在单独讨论，可直接写出结果）

4.直线和圆的位置关系

设圆方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，直线$l: Ax+By+C=0$，

则圆心(a,b)到l的距离为$d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\begin{cases} l\text{ 和圆相交} \Leftrightarrow d<r \\ l\text{ 和圆相切} \Leftrightarrow d=r \\ l\text{ 和圆相离} \Leftrightarrow d>r \end{cases}$$

5.圆和圆的位置关系

设圆C_1：$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$，圆$C_2$：$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$，记圆心距$d=|CC_1|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$

（1）如$r_1>r_2$，则：

$$\begin{cases} \text{两圆内含} \Leftrightarrow \quad d<r_1-r_2 \\ \text{两圆内切} \Leftrightarrow \quad d=r_1-r_2 \\ \text{两圆相交} \Leftrightarrow \quad r_1-r_2<d<r_1+r_2 \\ \text{两圆外切} \Leftrightarrow \quad d=r_1+r_2 \\ \text{两圆外离} \Leftrightarrow \quad d>r_1+r_2 \end{cases}$$

（$d=0$时称两圆同心，是内含的一种特例）

（2）如$r_1=r_2=r$，则：

$$\begin{cases} \text{两圆重合} \Leftrightarrow & d=0 \\ \text{两圆相交} \Leftrightarrow & 0<d<2r \\ \text{两圆外切} \Leftrightarrow & d=2r \\ \text{两圆外离} \Leftrightarrow & d>2r \end{cases}$$

解析几何

- 1.三个元素
  - (1) 点
  - (2) 线
  - (3) 圆
- 2.六种关系
  - (1) 点与点 $\rightarrow$ $\boxed{\text{距离、中点}}$
  - (2) 点与线 $\rightarrow$ $\boxed{\text{距离、对称}}$
  - (3) 点与圆 $\rightarrow$ $\boxed{\text{圆内、圆上、圆外}}$
  - (4) 线与线 $\rightarrow$ $\boxed{\text{平行、相交、垂直}}$
  - (5) 线与圆 $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{相离：} d>r \\ \text{相切：} d=r \\ \text{相交：} d<r \end{array}}$
  - (6) 圆与圆 $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{外离：} d>r_1+r_2 \\ \text{外切：} d=r_1+r_2 \\ \text{相交：} \lvert r_1-r_2\rvert<d<\lvert r_1+r_2\rvert \\ \text{内切：} d=\lvert r_1-r_2\rvert \\ \text{内含：} d<\lvert r_1-r_2\rvert \end{array}}$
- 3.常见题型
  - (1) 图像判断
  - (2) 最值 $\rightarrow$ $\boxed{\text{距离、斜率、截距、切线}}$
  - (3) 对称 $\rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \text{点、线、圆关于一般直线对称} \\ \text{点、线、圆关于特殊直线对称} \end{array}}$
  - (4) 面积

九、计数问题

1.分组问题：n 个对象分成数量为 n_1、n_2、$\cdots n_k$ 的 k 组（$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$），如 n_1、n_2、$\cdots$、n_k 各不相同，且各组不必排序，则分法总数为 $C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_{k-1}+n_k}^{n_{k-1}}$。如其中有 r 组的对象数量相同，则须乘以 $\frac{1}{r!}$，如所分成的 k 组要排序，则须乘以 $k!$

2.传球问题：m 个人相互传球，由甲开始第一次传球，经过第 n 次传球后，球又回到甲手中的不同传球方法：设经过第 n 次传球后，球又回到甲手中的不同传球数为 A_n，则 $A_n=m^{n-1}-A_{n-1}$，$A_1=0$

3.二项式定理：$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$，其中第 $k+1$ 项为 $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$ 称为通项，$C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^n$ 称为展开式中的二项式系数，令 $a=b=1$，得：$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$，二项式系数性质：

（1）$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$，其中 n 为偶数；

（2）$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$，其中 n 为奇数.

（3）n 为偶数时中间项的系数最大，n 为奇数时中间两项的系数等值且最大.

十、数据描述

1. 平均值：设 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，称 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的平均值.

2. 方差：$s^2=\dfrac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots(x_n-\overline{x})^2]$.

3. 标准差：$s=\sqrt{s^2}$.

十一、应用题

1. 路程问题

行程典型问题 I：

1）相遇：速度和×相遇时间=距离和，即 $(v_1+v_2)\times t_{相遇}=s_1+s_2$

2）追及：速度差×追击时间=距离差，即 $\Delta v\times t_{追及}=\Delta s$

行程典型问题 II：

1）相对速度：当两个速度分别为 v_1、v_2 的运动物体同向运动时（$v_1>v_2$），它们的相对速度为 v_1-v_2，反向运动时，它们的相对速度为 v_1+v_2，即同向相减反向相加

2）行船问题：顺水速度=船速+水速，逆水速度=船速－水速

2. 工程问题

基本公式：工程量=工效×时间

通常设：各部分的工作量之和=总工作量=1，此时工效和时间互为倒数

3.盈利问题. 基本公式：利润＝收入－成本；利润＝利率×成本

4.浓度问题

基本公式：（以液体为例）；溶液量＝溶质量＋溶剂量；浓度=$\dfrac{\text{溶质}}{\text{溶液}}\times 100\%$

5.增长率问题. 基本公式：某变量值从 a 增长到值 b，则增长率 $\beta=\dfrac{b-a}{a}=\dfrac{b}{a}-1$，或写成：$b=a(1+\beta)$.（a＞0, b＞0.如 b＜a,则 β 为负值，也称为下降率或负增长率）

变式 1：如某变量在初值 a 的基础上连续进行了 n 次增长，各次的增长率分别为 β_1、β_2、…、β_n，最后得到终值为 b，则有：$b=a(1+\beta_1)(1+\beta_2)\ldots(1+\beta_n)$

变式 2：如设这 n 次增长率不变，记为 β，仍将初值 a 增长到终值 b，即成立 $b=a(1+\beta)^n$，则称 β 为这 n 次增长的平均增长率. （此式也称为复利公式）

从以上可得平均增长率的两个计算公式

$$\beta=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1；\quad \beta=\sqrt[n]{(1+\beta_1)(1+\beta_2)\cdots(1+\beta_n)}-1$$

（从第二个公式可知：$1+\beta$ 是 $1+\beta_1$、$1+\beta_2$、…、$1+\beta_n$ 的几何平均值）

6.整系数不定方程：根据题意列出方程（方程个数少于未知量个数），求其整数解

第一步：根据整数的运算性质估出整数解的范围；

第二步：从估出的范围中取整数验证其是否为方程的解

7.线性规划问题

方法一：边界取等，求整数解

第一步：根据题意列出多元变量不等式组；第二步：将不等式直接变成等式，求解方程组；第三步：若所求解为整数，即为不等式组的最优解；若所求解非整数，取其左右相邻的整数，验证出最优解

方法二：图像法