2020考研数学真题解析之数一、三21题数二23题

来源：文都教育

2020考研已经结束，考研党们辛苦付出的一年也终有收获，对于线代来说，矩阵可逆以及相似对角化问题历来是热门常规考点，毫无意外的，今年三套卷子里都有涉及这些考点，数一21题，数二23题，数三21题，题目完全一样，对于第一问证明矩阵P可逆，对2阶方阵，证明可逆只需证明列构成的向量组是线性无关的即可，可按照两个向量线性无关对应分量不成比例来证，也可用线性无关的定义来证明矩阵P的列向量线性无关。

对于第二问，判断矩阵是否相似对角化，也是比较常规的考点和题型，可直接判断特征值的个数，或线性无关的特征向量的个数是否等于矩阵的阶数等，也可借助于其他矩阵，比如相似矩阵，因为相似矩阵有相同的特征值，如果相似矩阵可对角化，那么所求矩阵也可相似对角化。具体答案见下面解析

21.设A为2阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中α是非零向量且不是A的特征向量.

（1）证明P为可逆矩阵

（2） 若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，求$P^{-1}AP$，并判断$A$是否相似于对角矩阵.

解析：(1)法一：$\alpha\neq 0且A\alpha\neq\lambda\alpha.$

故α与$A\alpha$线性无关.

则$r(\alpha,A\alpha)=2$

所以P可逆.

法二：假设存在一组数k_1,k_2，使得$k_1\alpha+k_2A\alpha=0$。现用反证法证明k_1,k_2全为0,

假设k_1,k_2不全为0，不妨设$k_2\neq 0$，于是有$A\alpha=-\dfrac{k_1}{k_2}\alpha$，由此可知$\alpha$是$A$的特征向量，与题设矛盾，所以有$k_2=0$，

于是$k_1\alpha=0$，又$\alpha\neq 0$，即$k_1=0$。于是可得α与$A\alpha$线性无关. $r(\alpha,A\alpha)=2$

所以P可逆.

（2）法一：由已知条件$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$，有$A^2\alpha=-A\alpha+6\alpha$

$$AP=A(\alpha,A\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha)=(A\alpha,-A\alpha+6\alpha)=(\alpha,A\alpha)\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$故P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}.$$

因为 P 可逆，所以有矩阵 A 与矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 相似。

又 $\begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$，$\lambda_1=-3$，$\lambda_2=2$，所以 A 的特征值也是-3,2

于是矩阵 A 可相似对角化。

法二：由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$

设 $(A^2 + A - 6E)\alpha = 0 \Rightarrow (A+3E)(A-2E)\alpha = 0$

由 $\alpha \neq 0$ 得 $(A^2+A-6E)x=0$ 有非零解

故 $|(A+3E)(A-2E)| = 0$

得 $|A+3E| = 0$ 或 $|A-2E| = 0$

若 $|(A+3E)| \neq 0$ 则有 $(A-2E)\alpha = 0$ 故与题意矛盾 $A\alpha = 2\alpha$

故 $|A+3E| = 0$ 同理可得 $|A-2E| = 0$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1 = -3$ $\lambda_2 = 2.$

A 有 2 个不同特征值故 A 相似对角化

最后祝愿 2020 考研党们能够成功上岸，考进理想的学府，人生从此杨帆起航。