2020 考研数学二真题及解析完整版

来源：文都教育

一、选择题：1~8 小题，第小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1. $x \to 0^+$，下列无穷小量中最高阶是（　　）

A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt$

B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt$

答案：D

解析:A. $\int_0^x \left(e^{t^2}-1\right)dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$

B. $\int_0^x \ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt \sim \int_0^x t^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt \sim \int_0^x t^2 dt = \frac{1}{3}x^3$

D. $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\,dt \sim \int_0^{\frac{1}{2}x^2} t^{\frac{3}{2}} dt$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{10\sqrt{2}}x^5$$

2. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 第二类间断点个数（　　）

A.1
B.2
C.3
D.4

答案：C

解析： $x=0, x=2, x=1, x=-1$ 为间断点

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1}\ln|1+x|}{-2x}=-\frac{e^{-1}}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x+1|}{x}=-\frac{e^{-1}}{2}$$

$x=0$ 为可去间断点

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$$

$x=2$ 为第二类间断点

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$$

$x=1$ 为第二类间断点

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty$$

$x=-1$ 为第二类间断点

3. $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=$

A. $\frac{\pi^2}{4}$

B. $\frac{\pi^2}{8}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{8}$

答案：A

解析：

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$$

令 $u=\sqrt{x}$，则

原式$=\int_0^1\frac{\arcsin u}{\sqrt{u^2(1-u^2)}}\cdot 2u\,\mathrm{d}u$

$$=2\int_0^1 \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$$

$$\underline{\underline{令u=\sin t}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

4. $f(x)=x^2\ln(1-x), n\geq 3$ 时， $f^{(n)}(0)=$

A. $-\frac{n!}{n-2}$

B. $\frac{n!}{n-2}$

C. $-\frac{(n-2)!}{n}$

D. $\frac{(n-2)!}{n}$

答案：A

解析：

$f(x)=x^2\ln(1-x), n\geq 3$

$f^{(n)}(x)=C_n^0x^2[\ln(1-x)]^{(n)}+C_n^1(x^2)'[\ln(1-x)]^{(n-1)}+C_n^2(x^2)''[\ln(1-x)]^{(n-2)}$

$\because [\ln(1-x)]^{(n)}=\frac{(n-1)!(-1)}{(1-x)^n}$

$[\ln(1-x)]^{(n-1)}=\frac{(n-2)!(-1)}{(1-x)^{n-1}}$

$[\ln(1-x)]^{(n-2)}=\frac{(n-3)!(-1)}{(1-x)^{n-2}}$

$(x^2)'=2x;(x^2)''=2.$

$\therefore f^{(n)}(x)=x^2\cdot\frac{(n-1)!(-1)}{(1-x)^n}+2n\cdot x\cdot\frac{(n-2)!(-1)}{(1-x)^{n-1}}+2\,\frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-3)!(-1)}{(1-x)^{n-2}}$

$\therefore f^{(n)}(0)=-\frac{n!}{n-2}.$

5.关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy & xy\neq 0 \\ x & y=0 \\ y & x=0 \end{cases}$ 给出以下结论

① $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$

② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = 1$

③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$ 正确的个数是

A.4
B.3
C.2
D.1
答案：B
解析：

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x} = 1$

② $xy \neq 0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$

$y = 0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1$

$x = 0$ 时，$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$

$\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f_x'(0,y)-f_x'(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-1}{y}$ 不存在.

③ $xy \neq 0,\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$

$y = 0,\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$

$x = 0,\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

④ $xy \neq 0, \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} xy = 0$

$y = 0, \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$x = 0, \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} y = y$

从而 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0.$

6.设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)>0$，则（　　）

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$

B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$

C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<e^2$

D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

答案：B
解析：由 $f'(x)>f(x)>0$知
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}-1>0$
即 $(\ln f(x)-x)'>0$
令 $F(x)=\ln f(x)-x$，则 $F(x)$在[-2,2]上单增
因 $-2<-1$，所以 $F(-2)<F(-1)$
即 $\ln f(-2)+2<\ln f(-1)+1$
$\dfrac{f(-1)}{f(-2)}>e$
同理，$-1<0, F(-1)<F(0)$
即 $\ln f(-1)+1<\ln f(0)$
$\dfrac{f(0)}{f(-1)}>e$

7.设四阶矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)$ 不可逆，a_{12} 的代数余子式 $A_{12}\neq 0, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为矩阵 A 的列向量组. A^* 为 A 的伴随矩阵.则方程组 $A^*x=\mathbf{0}$ 的通解为（　　）.

A. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

B. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

C. $x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

D. $x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数

答案：C
解析：
∵A 不可逆

∴|A|=0

$\because A_{12}\neq 0 \quad \therefore r(A)=3$

$\therefore r(A^*)=1$

$\therefore A^*x=0$的基础解系有 3 个线性无关的解向量.

$\because A^*A=|A|E=0$

∴A 的每一列都是$A^*x=0$的解

又$\because A_{12}\neq 0 \qquad \therefore \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性无关

$\therefore A^*x=0$的通解为$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$

8.设A为 3 阶矩阵，α_1,α_2为A属于特征值 1 的线性无关的特征向量，α_3为A的属于特征值-1 的特征向量，则满足$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的可逆矩阵$P$可为（　　）.

A.$(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$

B.$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

C.$(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,-\alpha_3)$

D.$(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,-\alpha_2)$

答案：D

解析：

$A\alpha_1=\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$

$A\alpha_3=-\alpha_3$

$\because P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\therefore P$的 1，3 两列为 1 的线性无关的特征向量$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$

P的第 2 列为A的属于-1 的特征向量α_3.

$\therefore P=(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

9.设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \end{cases}$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$_______.

解析：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}$$

$$=\frac{1}{t}$$

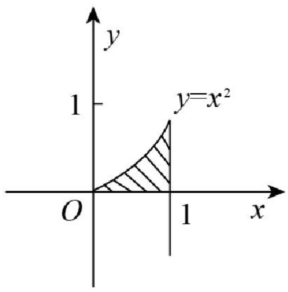
$$\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}$$

$$=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

$$\frac{dy^2}{dx^2}\Big|_{t=1}=-\sqrt{2}$$

10. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=$_____.

解析：$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx$



$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy$

$=\int_0^1\sqrt{x^3+1}dx\int_0^{x^2}dy$

$=\int_0^1\sqrt{x^3+1}x^2dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 (x^3+1)^{\frac{1}{2}} d(x^3+1)$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$

$=\frac{2}{9}\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)$

11.设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$，则 $dz\,|_{(0,\pi)}=$______.

解析:

$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}y$

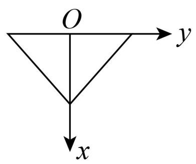
$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}[y+\cos(x+y)],\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=\pi-1$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+[xy+\sin(x+y)]^2}[x+\cos(x+y)],\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,\pi)}=-1$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,\pi)}=(\pi-1)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

12.斜边长为 $2a$ 等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐，设重力加速度为 g，水密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为______

解析：建立直角坐标系，如图所示



$F=2\int_0^a \rho gx\cdot(a-x)\,\mathrm{d}x$

$=2\rho g\int_0^a ax-x^2\,\mathrm{d}x$

$=2\rho g\left(\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a$

$=\frac{1}{3}\rho g a^3$

13.设 $y=y(x)$ 满足 $y''+2y'+y=0$，且 $y(0)=0,y'(0)=1$，则 $\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x=$_____

解析：特征方程 $\lambda^2+2\lambda+1=0$

$\therefore \lambda_1=\lambda_2=-1$

$\because y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}$

$\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} y''(x) + 2y'(x)\,\mathrm{d}x$

$= -[y'(x) + 2y(x)]\Big|_0^{+\infty}$

$= [y'(0) + 2y(0)] = 1$

14.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________

解析：

$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a & -1+a^2 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & -1+a^2 & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & a^2-2 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4 - 4a^2.$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（本题满分 10 分）

求曲线 $y = \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

解析：$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^x}{(1+x)^x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x}}{\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x(\ln x - \ln(1+x))}$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\ln\frac{x+1-1}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1-\frac{1}{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\left(-\frac{1}{1+x}\right)}=e^{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-e^{-1}x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-e^{-1}x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x^x}{(1+x)^x}-e^{-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(e^{x\ln\frac{x}{1+x}}-e^{-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} xe^{-1}\left(e^{x\ln\frac{x}{1+x}+1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{-1}x\cdot\left(x\ln\frac{x}{1+x}+1\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+} e^{-1}\frac{\frac{1}{t}\cdot\ln\frac{\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t}}+1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0^+} e^{-1}\frac{\ln\frac{1}{t+1}+t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+} e^{-1}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\frac{1}{2}e^{-1}$$

∴曲线的斜渐近线方程为 $y=e^{-1}x+\frac{1}{2}e^{-1}$

16.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1, g(x)=\int_0^1 f(xt)dt,$ 求$g'(x)$ 并证明 $g'(x)$在$x=0$ 处连续.

解析：因为 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$　　　$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0$

所以 $g(0)=\int_0^1 f(0)dt=0$

因为 $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt\underline{\underline{xt=u}}\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$

当 $x\neq0$ 时， $g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}$

当 $x=0$ 时， $g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}$

$$\therefore g'(x)=\begin{cases}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}, & x\neq0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

又因为 $\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)}{x^2}-\int_0^x f(u)du$

$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}\right]=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore g'(x)$在$x=0$ 处连续

17.（本题满分 10 分）

求二元函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值

解析：求一阶导可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=24y^2-x$$

令 $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\ y=\frac{1}{12}\end{cases}$

求二阶导可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 y}=-1\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=48y$$

当 $x=0,y=0$时. $A=0.B=-1.C=0^-$

$AC-B^2<0$ 故不是极值.

当 $x=\frac{1}{6}\ y=\frac{1}{12}$ 时

$A=1.B=-1.C=4.$

$AC-B^2>0.A=1>0$ 故 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ 且极小值

极小值 $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^3+8\left(\frac{1}{12}\right)^3-6\times\frac{1}{12}=-\frac{1}{216}$

18. 已知 $2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f(x)$，并求直线 $y=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 与函数 $f(x)$ 所围图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积。

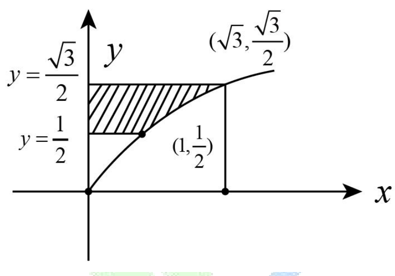
解析：①$\because 2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ …①

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f\left(x\right)=\frac{\frac{1}{x^2}+2\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}} \quad \ldots②$$

①×2−②×x^2得

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

②



$$V=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2-\int_1^{\sqrt{3}}\pi\frac{x^2}{x^2+1}dx$$

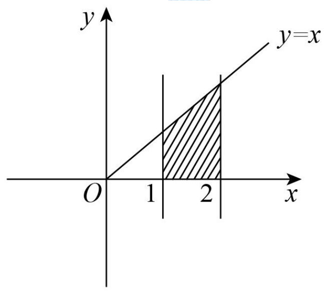
$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi-\pi\cdot\sqrt{3}+\frac{\pi^2}{12}$$

$$=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{4}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

19.（本题满分 10 分）

平面 D 由直线 $x=1,x=2,y=x$与x 轴围成，计算 $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy.$

解析：积分区域如图：



$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}}\frac{r}{r\cos\theta}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{2}r^2\Big|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\tan\theta$$

$$=\frac{3}{2}\left[\sec\theta\tan\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\sec\theta\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left[\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta\text{-}1)\sec\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$$

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$$

$=\frac{3}{4}\left[\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$

20.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\int_1^x e^{t^2}dt.$

证：存在 $\xi\in(1,2), f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$；

（2）证：存在 $\eta\in(1,2), f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}.$

证明（1）构造辅助函数 $F(x)=f(x)(x-2)=(x-2)\int_1^x e^{t^2}dt$

显然 $F(1)=0, F(2)=0,$ 又 $F(x)$ 在 $[1,2]$ 连续, $(1,2)$ 上可导,

由罗尔定理知 $\exists\xi\in(1,2),$ 使得 $F'(\xi)=0$

又因为 $F'(x)=\int_1^x e^{t^2}dt+(x-2)e^{x^2}=f(x)+(x-2)e^{x^2}$

所以 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}.$

令 $g(x)=\ln x$ 由柯西中值定理得 $\exists\eta\in(1,2)$

使得 $$\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{f(2)}{\ln 2}=\frac{e^{\eta^2}}{\frac{1}{\eta}}=\eta e^{\eta^2}$$

即 $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$

21.（本题满分 11 分）

设曲线 $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0(x\geq 0)$， $f(x)$ 的图象过原点 O

曲线上任意一点 M 的切线与 X 轴交于 T，$MP\perp x$ 轴，曲线 $y=f(x), MP, x$ 轴围成的面积与 ΔMTP 面积比为 3：2，求曲线方程.

解析：设切点 M 坐标为 (x,y)，则过 M 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

令 $Y=0$ 得 $X=x-\frac{y}{y'}$

由题意得

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{y'}\cdot y}=\frac{3}{2}$$

整理并求导得　　$3yy''-2y'^2=0$

令 $y'=p$　　$y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 代入上式得

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p^2=0$$

解得　　$p=C_1y^{\frac{2}{3}}$

即　　$y'=C_1y^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{2}{3}}}=C_1\mathrm{d}x$$

$3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$　　由 $y(0)=0$ 得 $C_2=0.$

$$3y^{\frac{1}{3}}=C_1x$$

$$y=Cx^3$$

22.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经可逆线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 得 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

（1）求 a 的值；

（2）求可逆矩阵 P.

解析：

（1）令 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{bmatrix}$

$f(y_1,y_2,y_3)$ 的矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}$

A 与 B 合同.则 $r(A)=r(B)$.

由于 $|B|=0$，故 $r(B)<3$，故 $|A|=0$.

而 $|A|=\begin{vmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{vmatrix}=(2a+1)(a-1)^2=0$

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$ 或 $a=1$.

当 $a=1$ 时，$r(A)=1$. 而 $r(B)=2$. 故舍去

所以 $a=-\dfrac{1}{2}$.

（2）当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，利用配方法把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为规范形.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3$$
$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2-\frac{3}{2}x_2x_3$$
$$=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{x_3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$$

令 $\begin{cases}z_1=x_1-\dfrac{1}{2}x_2-\dfrac{1}{2}x^3\\ z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x_2-x_3)\\ z_3=x_3\end{cases}$ 即令 $P_1=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$Z=P_1X$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+z_2^2$

利用配方法把 $f(y_1,y_2,y_3)$ 化为规范形.

$$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+2y_1y_2+4y_3^2=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = 2y_3 \\ z_3 = y_2 \end{cases}$ 即令 $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $Z = P_2 Y$.

则 $f(y_1, y_2, y_3) = z_1^2 + z_2^2$.

故 $P_1 X = P_2 Y$ 即 $X = P_1^{-1} P_2 Y$.

所以 $P = P_1^{-1} P_2$.

由于 $P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

故 $P = P_1^{-1} P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

23.（本题满分 11 分）

设 A 为 2 阶矩阵，$P = (\alpha, A\alpha)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(1)证明 P 为可逆矩阵.

(2)若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵.

解析：

(1) $\alpha \neq 0$ 且 $A\alpha \neq \lambda\alpha$.

故 α 与 $A\alpha$ 线性无关.

则 $r(\alpha, A\alpha) = 2$

则 P 可逆.

(2)法一：由已知有 $A^2\alpha = -A\alpha + b\alpha$

于是 $AP=A(\alpha,A\alpha)=(A\alpha,A^2\alpha)=(A\alpha,-A\alpha+6\alpha)$

$=(\alpha,A\alpha)\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$, 故有 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$, $\because P$ 可逆

$\therefore$ 可得 A 与 $\begin{pmatrix}0&6\\1&-1\end{pmatrix}$ 相似，又 $\begin{vmatrix}\lambda&-6\\-1&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda+3)\bullet(\lambda-2)=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-3,\lambda_2=2$

$\therefore$ 可得 A 的特征值也为-3，2 于是 A 可相似对角化

方法二　$P^{-1}AP$ 同方法一

由 $A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$

下面是证明 A 可相似对角化

$(A^2+A-6E)\alpha=0$

设 $(A+3E)(A-2E)\alpha=0$

由 $\alpha\neq 0$ 得 $(A^2+A-6E)x=0$ 有非零解

故 $|(A+3E)(A-2E)|=0$

得 $|A+3E|=0$ 或 $|A-2E|=0$

若 $|(A+3E)|\neq 0$ 则有 $(A-2E)\alpha=0$ 故 $A\alpha=2\alpha$ 与题意矛盾

故 $|A+3E|=0$ 同理可得 $|A-2E|=0$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1=-3$　$\lambda_2=2.$

A 有 2 个不同特征值故 $A\alpha$ 相似对角化